

УДК 539.3

КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ В МАТЕРИАЛАХ СО СТРУКТУРНЫМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ

А.А. Роговой

Аннотация

На основе подхода, приводящего в рамках конечных деформаций к уравнению теплопроводности, а именно к той его части, которая связана с производством тепла неупругими источниками, рассмотрены вопросы разделения неупругой энергии на тепловую и скрытую, связанную со структурными изменениями в материале. При этом с учетом экспериментальных данных полагалось, что упругие свойства материала не зависят от изменений структуры, связанных с пластическими деформациями. Описана экспериментальная кривая доли общего количества пластической работы, перешедшей в тепло.

Ключевые слова: конечные деформации, уравнение теплопроводности, тепловая и скрытая неупругая энергия, перешедшая в тепло пластическая работа.

Введение

Известно, что часть пластической работы, затраченной на деформирование материалов, переходит в тепло, а часть идет на изменение энергий дислокаций, дефектов и т. п. и энергий их взаимодействия. На макроуровне это новое состояние структуры материала проявляется в изменении его упругих и пластических характеристик. В последние годы появились систематические экспериментальные исследования, позволяющие разделить затраченную пластическую работу на запасенную и тепловую части энергии. Для правильной интерпретации полученных в этих работах результатов необходим подход, приводящий к уравнению теплопроводности, а именно к той его части, которая связана с производством тепла неупругими источниками в рамках конечных деформаций. Такой подход разработан в [1–6], кратко изложен в первом разделе настоящей статьи и использован во втором разделе для описания экспериментальных данных о части пластической работы, перешедшей в тепло.

1. Предварительные сведения

1.1. Кинематические соотношения. Придерживаясь подхода, изложенного в работах [2, 3] и основанного на наложении малых деформаций на конечные, представим градиент места в виде мультипликации малых упругих, малых неупругих и конечных упруго-неупругих деформаций (см. рис. 1):

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}_E \cdot \mathbf{f}_{IN} \cdot \mathbf{F}_*. \quad (1.1)$$

Здесь упруго-неупругий градиент места \mathbf{F}_* переводит начальную конфигурацию κ_0 , положение точки в которой определяется радиусом-вектором \mathbf{r} , в первую промежуточную κ_1 . Градиент \mathbf{f}_{IN} переводит конфигурацию κ_1 во вторую, тоже промежуточную, конфигурацию κ_2 . И, наконец, градиент \mathbf{f}_E переводит конфигурацию κ_2 в текущую κ с радиусом-вектором \mathbf{R} . Причем конфигурации κ_1 , κ_2

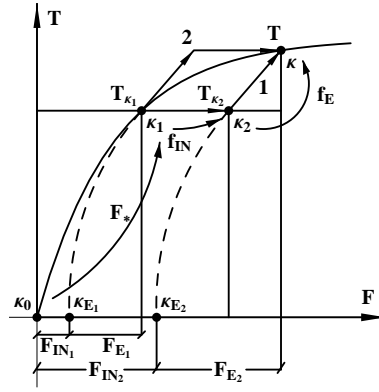


Рис. 1. Кинематика и соответствующие ей напряжения

и текущая близки между собой, что формализуется выражениями

$$\mathbf{R}_{\kappa_2} = \mathbf{R}_{\kappa_1} + \varepsilon \mathbf{u}_{IN}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_{\kappa_2} + \varepsilon \mathbf{u}_E,$$

где ε – малый параметр (положительная величина), а \mathbf{u}_{IN} и \mathbf{u}_E – векторы неупругих и упругих перемещений, последовательно переводящие конфигурацию κ_1 в κ_2 и κ_2 в текущую.

С точностью до линейного представления по ε конфигурации κ_1 и κ_2 неразличимы:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_E \cdot \mathbf{f}_{IN} = \mathbf{f}_{IN} \cdot \mathbf{f}_E = \mathbf{g} + \varepsilon (\mathbf{e} + \mathbf{d}) = \\ = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{e}) \cdot (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{d}) = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{e}), \end{aligned}$$

где \mathbf{g} – единичный тензор, $\mathbf{e} = \mathbf{e}_E + \mathbf{e}_{IN}$ и $\mathbf{d} = \mathbf{d}_E + \mathbf{d}_{IN}$ – полная малая деформация и полный малый поворот. В результате соотношение (1.1) представляется в виде

$$\mathbf{F} = [\mathbf{g} + \varepsilon (\mathbf{e}_E + \mathbf{e}_{IN} + \mathbf{d}_E + \mathbf{d}_{IN})] \cdot \mathbf{F}_*.$$

Это приближенное соотношение (при его получении сохранялись только линейные относительно ε слагаемые) предельным переходом при стремлении промежуточной конфигурации к текущей легко сводится к точному эволюционному

$$\dot{\mathbf{F}} = (\mathbf{D}_E + \mathbf{D}_{IN} + \mathbf{W}_E + \mathbf{W}_{IN}) \cdot \mathbf{F} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}. \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{D}_E = \dot{\mathbf{e}}_E$, $\mathbf{D}_{IN} = \dot{\mathbf{e}}_{IN}$ – деформации упругой и неупругой скоростей перемещений (совпадающие в данном случае со скоростями соответствующих деформаций), $\mathbf{W}_E = \dot{\mathbf{d}}_E$, $\mathbf{W}_{IN} = \dot{\mathbf{d}}_{IN}$ – упругий и неупругий тензоры вихря. Тензоры же \mathbf{P} и \mathbf{Q} – любые достаточно гладкие тензорные функции, удовлетворяющие условию $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A} = \mathbf{D}_E + \mathbf{D}_{IN} + \mathbf{W}_E + \mathbf{W}_{IN}$. В работе [2] показано, что на основе представления $\mathbf{P} = \mathbf{D}_E + \mathbf{W}_E$ решением уравнения (1.2) будет тензор

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{F}_{IN}, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{F}_E = [\mathbf{g} + \varepsilon (\mathbf{e}_E + \mathbf{d}_E)] \cdot \mathbf{F}_{E*}, \quad \mathbf{F}_{IN} = [\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot (\mathbf{e}_{IN} + \mathbf{d}_{IN}) \cdot \mathbf{F}_{E*}] \cdot \mathbf{F}_{IN*} \quad (1.4)$$

и градиенты места, помеченные «звездочкой», относятся к промежуточной конфигурации κ_1 . Представление (1.3) совпадает по форме с известным разложением Ли,

но свободно от недостатков последнего. В частности, из этого представления следует, что полная деформация скорости перемещений есть сумма упругой и неупругой деформаций скорости и упругий градиент места не меняется при чисто неупругом изменении конфигурации.

Мера деформаций Коши–Грина $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ записывается в виде $\mathbf{C} = \mathbf{F}_{IN}^T \cdot \mathbf{C}_E \cdot \mathbf{F}_{IN}$, где $\mathbf{C}_E = \mathbf{F}_E^T \cdot \mathbf{F}_E$. Эту меру с учетом (1.4) можно представить в виде

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_* + 2\varepsilon \mathbf{F}_*^T \cdot (\mathbf{e}_E + \mathbf{e}_{IN}) \cdot \mathbf{F}_*, \quad \mathbf{F}_* = \mathbf{F}_{E*} \cdot \mathbf{F}_{IN*}, \quad \mathbf{C}_* = \mathbf{F}_*^T \cdot \mathbf{F}_*,$$

или как

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_* + 2\varepsilon \mathbf{F}_*^T \cdot \mathbf{e}_E \cdot \mathbf{F}_*, \quad \mathbf{F}_* = \mathbf{F}_{E*} \cdot \mathbf{F}_{IN}, \quad \mathbf{C}_* = \mathbf{F}_*^T \cdot \mathbf{F}_*.$$

Величины, помеченные “*”, относятся к промежуточной конфигурации κ_1 , а величины, помеченные “*”, – к промежуточной упругой конфигурации κ_2 (см. рис. 1). В соответствии с этими соотношениями можно получить предельным переходом, при стремлении промежуточной конфигурации κ_1 к текущей ($\mathbf{F}_* \rightarrow \mathbf{F}$, $\mathbf{C}_* \rightarrow \mathbf{C}$) и промежуточной упругой конфигурации κ_2 к текущей ($\mathbf{F}_* \rightarrow \mathbf{F}$, $\mathbf{C}_* \rightarrow \mathbf{C}$), два приращения и две скорости изменения меры деформации \mathbf{C} [3]:

$$(d\mathbf{C})_{\kappa_1} = 2\mathbf{F}^T \cdot (d\mathbf{e}_E + d\mathbf{e}_{IN}) \cdot \mathbf{F},$$

$$(\dot{\mathbf{C}})_{\kappa_1} = 2\mathbf{F}^T \cdot (\dot{\mathbf{e}}_E + \dot{\mathbf{e}}_{IN}) \cdot \mathbf{F} = 2\mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{D}_E + \mathbf{D}_{IN}) \cdot \mathbf{F}$$

относительно конфигурации κ_1 (полное приращение и полная скорость изменения тензора \mathbf{C}) и

$$(d\mathbf{C})_{\kappa_2} = 2\mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{e}_E \cdot \mathbf{F}, \quad (\dot{\mathbf{C}})_{\kappa_2} = 2\mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{e}}_E \cdot \mathbf{F} = 2\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D}_E \cdot \mathbf{F} \quad (1.5)$$

относительно конфигурации κ_2 (приращение и скорость изменения тензора \mathbf{C} за счет только упругих деформаций).

Чтобы учесть влияние температуры, представим, аналогично работе [3], кинематику термо-упруго-неупругого процесса в виде $\mathbf{F} = \mathbf{f}_E \cdot \mathbf{f}_{IN} \cdot \mathbf{f}_\Theta \cdot \mathbf{F}_*$, где \mathbf{f}_Θ – градиент места, соответствующий малым температурным деформациям, и \mathbf{F}_* – теперь термо-упруго-неупругий градиент места, переводящий начальную конфигурацию в промежуточную. Причем градиенты места, определяемые малыми деформациями, все коммутируют между собой. Поступая аналогично работе [3], получаем, что $\mathbf{F} = \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{F}_{IN} \cdot \mathbf{F}_\Theta$, где \mathbf{F}_E и \mathbf{F}_{IN} представляются соотношениями (1.4), а

$$\mathbf{F}_\Theta = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{F}_{IN*}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot \mathbf{h}_\Theta \cdot \mathbf{F}_{E*} \cdot \mathbf{F}_{IN*}) \cdot \mathbf{F}_{\Theta*}. \quad (1.6)$$

Здесь \mathbf{h}_Θ – градиент температурных перемещений относительно конфигурации, соответствующей градиенту места \mathbf{F}_* . Полные малые деформации и повороты определяются теперь выражениями $\mathbf{e} = \mathbf{e}_E + \mathbf{e}_{IN} + \mathbf{e}_\Theta$, $\mathbf{d} = \mathbf{d}_E + \mathbf{d}_{IN} + \mathbf{d}_\Theta$, где \mathbf{e}_Θ и \mathbf{d}_Θ – симметричная и кососимметричная части \mathbf{h}_Θ .

Соотношения (1.4) и (1.6) удобно переписать в форме

$$\mathbf{F}_i = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{P}_i) \cdot \mathbf{F}_{i*}, \quad \mathbf{P}_i = \begin{cases} \mathbf{h}_E, & i = E, \\ \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot \mathbf{h}_{IN} \cdot \mathbf{F}_{E*}, & i = IN, \\ \mathbf{F}_{IN*}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot \mathbf{h}_\Theta \cdot \mathbf{F}_{E*} \cdot \mathbf{F}_{IN*}, & i = \Theta. \end{cases}$$

На основе полярных разложений $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$ для градиента места с любым индексом “ i ” и представления тензоров, определяющих полярные разложения, в виде

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 U_i \delta_i^{(1)} \delta_i^{(1)}, \quad \mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 U_i \delta_i^{(2)} \delta_i^{(2)},$$

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \delta_i^{(2)} \delta_i^{(1)}, \quad \mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 U_i \delta_i^{(2)} \delta_i^{(1)},$$

где U_i – собственные значения симметричного положительно определенного тензора \mathbf{U} (или \mathbf{V}), $\delta_i^{(1)}$ – собственные векторы тензора \mathbf{U} , единичные и ортогональные, $\delta_i^{(2)}$ – собственные векторы тензора \mathbf{V} , также единичные и ортогональные, в работе [4] рассмотрены изменения этих тензоров при слабых возмущениях. В частности, для изменения ортогонального тензора \mathbf{R} получено выражение

$$\mathbf{R} = \left\{ \mathbf{g} + \varepsilon \left[\mathbf{P}_C - \frac{U_i - U_j}{U_i + U_j} (\delta_i^{(2)} \cdot \mathbf{P}_S \cdot \delta_j^{(2)}) \delta_i^{(2)} \delta_j^{(2)} \right] \right\} \cdot \mathbf{R}_*, \quad (1.7)$$

где \mathbf{P}_S и \mathbf{P}_C – симметричная и кососимметричная части \mathbf{P} . Естественно, что присутствующие в этих соотношениях тензоры чистой деформации, их собственные значения и векторы, ортогональный тензор относятся к неупругой или температурной кинематике, то есть имеют индекс “ IN ” или “ Θ ”.

1.2. Определяющее уравнение. Как известно [7], в соответствии с теоремой Селерье–Рихтера или теоремой приведения Нолла определяющее уравнение для простого материала, удовлетворяющее принципу объективности, имеет вид

$$\mathbf{T} = \mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{R}^T,$$

где \mathbf{T} – тензор истинных напряжений и $\tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{U})$ – отклик материала на чистую деформацию. Это соотношение может быть представлено в нескольких эквивалентных формах (см. [5, 6]), в частности в форме

$$\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_6 \cdot \mathbf{F}^T, \quad (1.8)$$

где $J = I_3(\mathbf{F})$ – третий главный инвариант \mathbf{F} , а функция отклика материала, обозначенная здесь и в работах [5, 6] как $\tilde{\mathbf{g}}_6$, связана с $\tilde{\mathbf{g}}_1$ соотношением $\tilde{\mathbf{g}}_1 = J^{-1} \mathbf{U} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_6 \cdot \mathbf{U}$. Будем полагать, что $\tilde{\mathbf{g}}_6 = \tilde{\mathbf{g}}_6(\mathbf{C}_E, \Theta, \mu_i)$ где Θ – абсолютная температура, μ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ – скалярные параметры, определяемые структурными изменениями, происходящими в материале в процессе деформирования. При этом $\tilde{\mathbf{g}}_6$ – это тензорная функция от \mathbf{C}_E с коэффициентами, зависящими от Θ и μ_i . Представляя каждую из входящих в (1.8) величин через ее значение в промежуточной конфигурации и приращение при переходе к близкой текущей ($A = A_* + \varepsilon a$), переписываем соотношение (1.8), сохраняя только линейные по ε слагаемые, относительно промежуточной конфигурации (см. [2]):

$$\mathbf{T} = [1 - \varepsilon I_1(\mathbf{e})] \mathbf{T}_* + \varepsilon \mathbf{h} \cdot \mathbf{T}_* + \varepsilon \mathbf{T}_* \cdot \mathbf{h}^T + \varepsilon \vartheta (\mathbf{T}, \Theta)_* + \varepsilon \zeta_i (\mathbf{T}, \mu_i)_* + \varepsilon \tilde{\mathbf{L}}_{6*}^{IV} \cdot \cdot \mathbf{e}_E. \quad (1.9)$$

Здесь \mathbf{e} и \mathbf{e}_E – полная термо-упруго-неупругая и чисто упругая малые деформации относительно промежуточной конфигурации, I_1 – первый главный инвариант, \mathbf{h} – градиент относительно промежуточной конфигурации вектора малых перемещений, переводящего промежуточную конфигурацию в близкую текущую, ϑ и ζ_i – приращения температуры и скалярных структурных параметров, $\tilde{\mathbf{L}}_{6*}^{IV}$ – функция отклика материала (тензор четвертого ранга) на малые упругие деформации относительно промежуточной конфигурации, конкретное выражение для которого приведено в [2] для слабосжимаемого материала, $\mathbf{T}_{,a} \equiv \partial \mathbf{T} / \partial a$, “ $*$ ” в индексе указывает, что значение соответствующей величины относится к промежуточной конфигурации. Приближенное соотношение (1.9) предельным переходом при

стремлении промежуточной конфигурации к текущей легко сводится к точному эволюционному

$$\mathbf{T}^{Tr} = \dot{\vartheta}(\mathbf{T}, \Theta) + \dot{\zeta}_i(\mathbf{T}, \mu_i) + \tilde{\mathbf{L}}_6^{IV} \cdot \dot{\mathbf{e}}_E \quad (1.10)$$

с автоматически вытекающей объективной производной Трусделла. Учитывая, что $\mathbf{e}_E = \mathbf{e} - \mathbf{e}_{IN} - \mathbf{e}_\Theta$ или $\dot{\mathbf{e}}_E = \dot{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{e}}_{IN} - \dot{\mathbf{e}}_\Theta$, и выписывая определяющие соотношения для \mathbf{e}_{IN} ($\dot{\mathbf{e}}_{IN}$) и \mathbf{e}_Θ ($\dot{\mathbf{e}}_\Theta$), замыкаем построение уравнений (1.9), (1.10).

В работе [2] введен функционал

$$W_1 = \int_0^t (\mathbf{F} \cdot \mathbf{P}_{II} \cdot \mathbf{F}^T) \cdot \mathbf{D}_E d\tau = \int_0^t J \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_E d\tau. \quad (1.11)$$

Здесь второй (симметричный) тензор Пиола–Кирхгофа \mathbf{P}_{II} представляется виде

$$\mathbf{P}_{II} = 4 \int_0^t \left(\mathbf{F} \overset{\circ}{\circ} \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}_E^2} \cdot \mathbf{F}^T \right) \cdot \mathbf{D}_E d\tau, \quad (1.12)$$

где W – упругий потенциал, зависящий от меры упругих деформаций \mathbf{C}_E , с константами, зависящими от температуры Θ и структурных параметров μ_i . Операция $\mathbf{A} \overset{\circ}{\circ} \mathbf{B}^{IV}$ означает позиционное скалярное умножение слева тензора второго ранга \mathbf{A} на третий базисный вектор тензора четвертого ранга \mathbf{B}^{IV} . Как показано в [2], функционал (1.11), (1.12) производит определяющее уравнение (1.9).

1.3. Соотношения, вытекающие из термодинамики. Выпишем термодинамическое неравенство Клаузиуса–Дюгема

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \rho (\dot{\Psi} + \dot{\Theta} s) - \mathbf{q} \cdot \tilde{\nabla} \ln \Theta \geq 0,$$

где ρ , Ψ , s – плотность массы в текущей конфигурации, удельные (отнесенные к единице массы) свободная энергия и энтропия, \mathbf{q} – вектор теплового потока, $\tilde{\nabla}$ – оператор Гамильтона в текущей конфигурации, \mathbf{D} – тензор полной деформации скорости перемещений. Из требований принципа объективности вытекает, что аргументами у функции Ψ могут быть только инвариантные величины, то есть какая-либо инвариантная по отношению к жесткому вращению текущей конфигурации кинематическая величина, температура Θ и конечное число внутренних параметров μ_i ($i = 1, \dots, m$) – объективных скалярных функций, характеризующих изменение внутренней структуры материала в процессе термо-упруго-неупругого деформирования. В качестве кинематической величины выберем тензор \mathbf{C}_{κ_2} (1.5) и представим $\Psi(\mathbf{C}_{\kappa_2}, \mu_i, \Theta)$ в виде (см. [3])

$$\Psi(\mathbf{C}_{\kappa_2}, \mu_i, \Theta) = \Psi_1(\mathbf{C}_{\kappa_2}, \mu_i, \Theta) + \Psi_2(\Theta) + \Psi_3(\mu_i),$$

полагая, что $\dot{\Psi}_1 = 0$, если $(\dot{\mathbf{C}})_{\kappa_2} = 0$, $\Psi_2 = 0$, если $\Theta = \Theta_0$, где Θ_0 – температура приведения в градусах Кельвина (обычно, это комнатная температура), и $\Psi_3 = 0$, если $\mu_i = 0$. Первое условие говорит о том, что если нет изменения упругой деформации ($\dot{\mathbf{e}}_E = \mathbf{D}_E = 0$), то и Ψ_1 не меняется. Этому условию удовлетворяет функционал (1.11), (1.12). Но он отнесен не к единичной массе, а к единичному недеформированному объему. Поэтому

$$\Psi = W_1/\rho_0 + \Psi_2(\Theta) + \Psi_3(\mu_i),$$

где ρ_0 – плотность массы в начальной конфигурации. В результате, построив локальное продолжение процесса [7] и связав $\dot{\mathbf{e}}_\Theta$ с изменением температуры $\dot{\Theta}$

простейшим законом линейного температурного расширения $\dot{\mathbf{e}}_\Theta = \beta \dot{\Theta} \mathbf{g}$, где β – коэффициент линейного температурного расширения, который полагаем функцией только температуры, получаем определяющее соотношение

$$\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}_{II} \cdot \mathbf{F}^T$$

(сравни с (1.8)), где \mathbf{P}_{II} задается выражением (1.12), соотношение для энтропии

$$s = \frac{J\beta}{\rho_0} I_1(\mathbf{T}) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial W_1}{\partial \Theta} - c_{T0} \ln \frac{\Theta_0}{\Theta} + \int_{\Theta_0}^{\Theta} \ln \frac{\Theta}{\Theta_1} c_{T1}(\Theta_1) d\Theta_1, \quad (1.13)$$

где c_{T0} и c_{T1} определяют теплоемкость при нулевом напряжении: $c_T = c_{T0} + \int_{\Theta_0}^{\Theta} c_{T1}(\Theta_1) d\Theta_1$, и, используя уравнение Фурье для теплового потока $\mathbf{q} = -\lambda \tilde{\nabla} \Theta$, где λ – коэффициент теплопроводности, термодинамическое неравенство

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN} - J^{-1} \rho_0 \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial W_1}{\partial \mu_i} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial \mu_i} \right) \dot{\mu}_i \geq 0. \quad (1.14)$$

Из первого закона термодинамики с учетом (1.11) (1.13) имеем уравнение теплопроводности (см. [3])

$$c \dot{\Theta} = \dot{Q}_E + \dot{Q}_{IN} + \rho \Omega + \tilde{\nabla} \cdot (\lambda \tilde{\nabla} \Theta), \quad (1.15)$$

где теплоемкость

$$c = J^{-1} \rho_0 c_T + \Theta [(\beta, \Theta + 2\beta^2) I_1(\mathbf{T}) + \beta I_1(\mathbf{T}, \Theta) - J^{-1} W_{1,\Theta\Theta}], \quad (1.16)$$

скорость производства тепла упругими источниками

$$\dot{Q}_E = \Theta \left[\mathbf{T}, \Theta - 2\beta \mathbf{T} - \beta (\mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{L}}_6^{IV}) \right] \cdot \mathbf{D}_E \quad (1.17)$$

и скорость производства тепла неупругими источниками и структурными изменениями в материале

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{IN} = & (1 - 2\beta\Theta) \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN} + \\ & + J^{-1} \left[\Theta W_{1,\Theta\mu_i} - W_{1,\mu_i} - \beta J \Theta I_1(\mathbf{T}, \mu_i) - \rho_0 \frac{\partial \Psi_3}{\partial \mu_i} \right] \dot{\mu}_i. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Эти соотношения при малых чисто упругих деформациях сводятся к уравнению

$$c_\sigma \dot{\Theta} = -\beta \Theta_0 I_1(\dot{\mathbf{T}}) + \rho \Omega + \tilde{\nabla} \cdot (\lambda \tilde{\nabla} \Theta) \quad (1.19)$$

или к более известному

$$c_e \dot{\Theta} = -3K\beta\Theta_0 I_1(\dot{\mathbf{e}}) + \rho \Omega + \tilde{\nabla} \cdot (\lambda \tilde{\nabla} \Theta), \quad (1.20)$$

где c_σ и c_e – отнесенные к единице объема теплоемкости при нулевом напряжении \mathbf{T} и при нулевой деформации \mathbf{e} , связанные для изотропного материала соотношением $c_\sigma - c_e = 3\beta^2 K \Theta_0$, K – модуль изменения объема.

1.4. Ограничения, вытекающие из термодинамики. Все соотношения механики должны удовлетворять принципу объективности, то есть быть материально независимыми от изменения систем отсчета, относительно которых рассматриваются движения. В уравнения термодинамики входят мощности $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_E$, $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN}$ и $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_\Theta$. В работе [3] показано, что без дополнительных ограничений эти скаляры зависят от выбора систем отсчета для описания неупругой и температурной кинематики. Объективность же всех соотношений будет выполняться, если градиенты места \mathbf{F}_{IN} и \mathbf{F}_Θ будут чистыми деформациями без вращений: $\mathbf{F}_{IN} = \mathbf{U}_{IN} = \mathbf{V}_{IN}$, $\mathbf{F}_\Theta = \mathbf{U}_\Theta = \mathbf{V}_\Theta$, то есть если в полярных разложениях тензоров $\mathbf{F}_{IN} = \mathbf{R}_{IN} \cdot \mathbf{U}_{IN} = \mathbf{V}_{IN} \cdot \mathbf{R}_{IN}$ и $\mathbf{F}_\Theta = \mathbf{R}_\Theta \cdot \mathbf{U}_\Theta = \mathbf{V}_\Theta \cdot \mathbf{R}_\Theta$ ортогональные тензоры \mathbf{R}_{IN} и \mathbf{R}_Θ являются единичными: $\mathbf{R}_{IN} = \mathbf{R}_\Theta = \mathbf{g}$. Последние условия определяют недостающие связи между \mathbf{e}_{IN} и \mathbf{d}_{IN} и между \mathbf{e}_Θ и \mathbf{d}_Θ . Недостающими они являются в силу того, что определяющие уравнения известны только для малых неупругих и температурных деформаций (скоростей). В теории пластичности, например, это ассоциированный закон, в теории вязкости – дифференциальный закон $\dot{\mathbf{e}}_{IN} = \mathbf{T}/\eta$, где η – вязкость, в теории термоупругости – закон линейного температурного расширения. Для малых вращений (скоростей) подобного типа соотношений нет.

С учетом вышесказанного ортогональные тензоры \mathbf{R}_{IN} и \mathbf{R}_Θ в полярных разложениях этих градиентов места должны быть единичными в любой момент времени. Отсюда следует, что в соотношении (1.7) $\mathbf{R} = \mathbf{R}_* = \mathbf{g}$ и тогда

$$\mathbf{P}_C = \frac{U_i - U_j}{U_i + U_j} (\delta_i^{(2)} \cdot \mathbf{P}_S \cdot \delta_j^{(2)}) \delta_i^{(2)} \delta_j^{(2)}.$$

Представляя тензор \mathbf{P}_C в базисе $\delta_i^{(2)}$, приходим к уравнению

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{P}_C + \mathbf{P}_C \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{P}_S - \mathbf{P}_S \cdot \mathbf{U},$$

которое для определения \mathbf{d}_{IN} и \mathbf{d}_Θ примет вид

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{d}_{IN} + \mathbf{d}_{IN} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{C}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{F}_*^{-T} \cdot \mathbf{U}_{\Theta*} \cdot \mathbf{F}_{E*}^{-1}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{e}_{IN} \cdot \mathbf{A}^T - \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_{IN};$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{d}_\Theta + \mathbf{d}_\Theta \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{F}_*^{-T} \cdot \mathbf{U}_{\Theta*} \cdot \mathbf{F}_*^{-1}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{e}_\Theta \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_\Theta.$$

Общий вид этих уравнений $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}$, где $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ или $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, а $\mathbf{X} = \mathbf{d}_{IN}$ или $\mathbf{X} = \mathbf{d}_\Theta$, и такое уравнение имеет единственное решение, если тензоры \mathbf{A} и $-\mathbf{B}$ не имеют общих собственных значений (см. [8, 9]). Рассматриваемые уравнения удовлетворяют этому условию.

2. Эволюционная модель термоупругопластичности

2.1. Основные соотношения. Используем определяющее уравнение относительно промежуточной конфигурации (1.9) или эволюционное определяющее уравнение (1.10):

$$\mathbf{T} = [1 - \varepsilon I_1(\mathbf{e})] \mathbf{T}_* + \varepsilon \mathbf{h} \cdot \mathbf{T}_* + \varepsilon \mathbf{T}_* \cdot \mathbf{h}^T + \varepsilon \vartheta (\mathbf{T}_{,\Theta})_* + \varepsilon \zeta_i (\mathbf{T}_{,\mu_i})_* + \varepsilon \tilde{\mathbf{L}}_{6*}^{IV} \cdot \cdot \mathbf{e}_E,$$

$$\mathbf{T}^{Tr} = \dot{\vartheta} (\mathbf{T}_{,\Theta}) + \dot{\zeta}_i (\mathbf{T}_{,\mu_i}) + \tilde{\mathbf{L}}_6^{IV} \cdot \cdot \dot{\mathbf{e}}_E$$

Здесь $\dot{\mathbf{e}}_E = \dot{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{e}}_\Theta - \dot{\mathbf{e}}_P$, $\dot{\mathbf{e}}_\Theta = \beta \dot{\Theta} \mathbf{g}$. В соответствии с ассоциированным законом пластического течения скорость пластической деформации $\dot{\mathbf{e}}_P$ определяется соотношением

$$\dot{\mathbf{e}}_P = \frac{\sqrt{3} \dot{\zeta}_P}{\sqrt{2} \sqrt{\partial F / \partial \mathbf{S}} \cdot \cdot \partial F / \partial \mathbf{S}} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}}, \quad \dot{\zeta}_P = \int_0^t \sqrt{(2/3)(\dot{\mathbf{e}}_P \cdot \cdot \dot{\mathbf{e}}_P)} dt \quad (2.1)$$

для активного процесса нагружения ($F = 0$, $dF = 0$, $(\partial F/\partial \mathbf{S}) \cdot d\mathbf{S} > 0$), а при нейтральном нагружении ($F = 0$, $dF = 0$, $(\partial F/\partial \mathbf{S}) \cdot d\mathbf{S} = 0$), разгрузке из упруго-пластического состояния ($F = 0$, $dF = 0$, $(\partial F/\partial \mathbf{S}) \cdot d\mathbf{S} < 0$) или пассивном (продолженном упругом) нагружении ($F < 0$) $\dot{\epsilon}_P = 0$. Здесь $F = F(\mathbf{S}, q)$ – функция текучести, \mathbf{S} и q – девиатор истинных напряжений и параметр упрочнения, ξ_P – накопленная интенсивность скоростей пластических деформаций (параметр Огдквиста; может служить параметром упрочнения q).

Соотношение (2.1) – объективное, так как $\dot{\epsilon}_P = \mathbf{D}_P$ – индифферентный тензор, а числитель и знаменатель – инвариантные величины. Производная же F по \mathbf{S} будет индифферентным тензором, если $F(\mathbf{S})$ – инвариантная величина. Действительно (см. [10]),

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}}\right)' = \frac{\partial F'}{\partial \mathbf{S}'} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \cdot \mathbf{C}_{II}^{IV} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{S}'}.$$

Так как $\mathbf{S} = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{S}' \cdot \mathbf{O}$ в силу объективности \mathbf{S} , то

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{S}'} = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{C}_{II}^{IV} \cdot \mathbf{O}.$$

Здесь одинаковые величины со штрихом и без штриха – это один и тот же объект, записанный в разных системах отсчета, \mathbf{C}_{II}^{IV} – второй изотропный тензор четвертого ранга, \mathbf{O} – любой ортогональный тензор и использовано правило дифференцирования скалярного произведения двух тензорных функций $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{X})$ тензорного аргумента \mathbf{X} (и то, и другое второго порядка) по аргументу \mathbf{X}

$$\frac{\partial(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{X}}.$$

Операция $\mathbf{B}^{IV} \cdot \mathbf{A}$ означает позиционное скалярное умножение справа тензора второго ранга \mathbf{A} на второй базисный вектор тензора четвертого ранга \mathbf{B}^{IV} . Тогда в силу свойств тензора \mathbf{C}_{II}^{IV} (см. [10])

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}}\right)' &= \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}}\right) \cdot \mathbf{C}_{II}^{IV} \cdot (\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{C}_{II}^{IV} \cdot \mathbf{O}) = \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}}\right)^T \cdot (\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{C}_{II}^{IV} \cdot \mathbf{O}) = \mathbf{O} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}}\right)^T \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{C}_{II}^{IV} = \mathbf{O} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}}\right) \cdot \mathbf{O}^T. \end{aligned}$$

В результате эволюционное уравнение термоупругопластичности принимает вид

$$\mathbf{T}^{Tr} = \dot{\vartheta}(\mathbf{T}, \theta) + \dot{\zeta}_i(\mathbf{T}, \mu_i) + \tilde{\mathbf{L}}_6^{IV} \cdot \left(\dot{\epsilon} - \beta \dot{\theta} \mathbf{g} - \frac{\sqrt{3} \dot{\xi}_P}{\sqrt{2} \sqrt{\partial F/\partial \mathbf{S}} \cdot \partial F/\partial \mathbf{S}} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \right) \quad (2.2)$$

и описывает большие термоупругопластические деформации с конечными упругими и конечными пластическими деформациями с учетом структурных изменений в материале, происходящих при активном процессе нагружения.

Конкретизируем теперь функцию текучести F , задав ее в простейшем виде

$$F(\mathbf{S}, q) = \sigma_i^2 - \sigma_T^2(q), \quad \sigma_i = \sqrt{(3/2)(\mathbf{S} \cdot \mathbf{S})},$$

где σ_i – интенсивность напряжений и σ_T – предел текучести. Тогда $\partial F/\partial \mathbf{S} = (3/2) \partial(\mathbf{S} \cdot \mathbf{S})/\partial \mathbf{S} = 3\mathbf{S}$, $\dot{\mathbf{e}}_P$ (выражение (2.1)) принимает известный вид $\dot{\mathbf{e}}_P = (3/2) (\xi_P/\sigma_i) \mathbf{S}$, выбранная функция текучести удовлетворяет одному из следствий постулата Друккера, а именно $(\partial F/\partial \mathbf{S}) \cdot \dot{\mathbf{e}}_P \geq 0$, и соотношения

$$\sigma_i = \sigma_T, \quad \dot{\sigma}_i = (\partial \sigma_T / \partial q) \dot{q}, \quad \dot{\sigma}_i > 0,$$

$$\sigma_i = \sigma_T, \quad \dot{\sigma}_i = (\partial \sigma_T / \partial q) \dot{q}, \quad \dot{\sigma}_i \leq 0 \quad \text{и} \quad \sigma_i < \sigma_T$$

определяют активное нагружение (первая строка), нейтральное нагружение или разгрузку из упругопластического состояния (три первых соотношения во второй строке) и пассивное (продолжающееся упругое) нагружение (последнее неравенство во второй строке).

Из зависимости $\sigma_i = \Phi(\xi_P)$ следует, что

$$\dot{\sigma}_i = \frac{\partial \Phi(\xi_P)}{\partial \xi_P} \dot{\xi}_P = H(\xi_P) \dot{\xi}_P,$$

где $H(\xi_P)$ – модуль пластического упрочнения. Разрешая это равенство относительно $\dot{\xi}_P$ и подставляя его в выражение для $\dot{\mathbf{e}}_P$, получаем

$$\dot{\mathbf{e}}_P = \frac{3 \dot{\sigma}_i}{2 H \sigma_i} \mathbf{S}. \quad (2.3)$$

В результате уравнение (2.2) приводится к виду

$$\mathbf{T}^{Tr} = \dot{\vartheta}(\mathbf{T}, \Theta) + \dot{\zeta}_i(\mathbf{T}, \mu_i) + \tilde{\mathbf{L}}_6^{IV} \cdot \left(\dot{\mathbf{e}} - \beta \dot{\Theta} \mathbf{g} - \frac{3 \dot{\sigma}_i}{2 H \sigma_i} \mathbf{S} \right). \quad (2.4)$$

Это соотношение справедливо для активного процесса термоупругопластического нагружения с любым уравнением состояния для конечных упругих деформаций. Выбирая в качестве соотношения, описывающего упругое деформирование, упрощенный закон Синьорини [11], конкретизируем тензор $\tilde{\mathbf{L}}_6^{IV}$.

Соотношение (2.4) и уравнение теплопроводности (соотношения (1.15)–(1.18)) использовались при исследовании процесса адиабатического упругопластического растяжения стержня из стали 30 ХГСА. Кинематика, изложенная в предыдущем разделе, конкретизировалась применительно к рассматриваемой задаче. Численная реализация осуществлялась в рамках вариационной постановки связанной проблемы термоупругопластичности (см. [12]). Начальная температура Θ_0 полагалась равной 300 К. Параметры материала, входящие в тензор $\tilde{\mathbf{L}}_6^{IV}$, брались из справочника и имели значения

$$\lambda_0 = 8.8 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad G_0 = 8.0 \cdot 10^4 \text{ МПа} \quad \text{при температуре 300 К},$$

$$\lambda = 8.6 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad G = 7.6 \cdot 10^4 \text{ МПа} \quad \text{при температуре 400 К}.$$

Полагалось, что эти параметры не зависят от предварительной пластической деформации (обоснование чему дано в следующем разделе), то есть в соотношении (2.4) и в уравнении теплопроводности (соотношения (1.15)–(1.18)) тензор \mathbf{T} и функционал W_1 не зависят от μ_i ($\mathbf{T}, \mu_i = \mathbf{0}$, $W_{1, \mu_i} = 0$), но линейно зависят от температуры в указанном диапазоне изменения последней:

$$\lambda = \lambda_0 - 0.002(\Theta - \Theta_0), \quad G = G_0 - 0.004(\Theta - \Theta_0).$$

Все остальные физико-механические параметры материала полагались постоянными (не зависящими от температуры и структурных изменений) и принимались

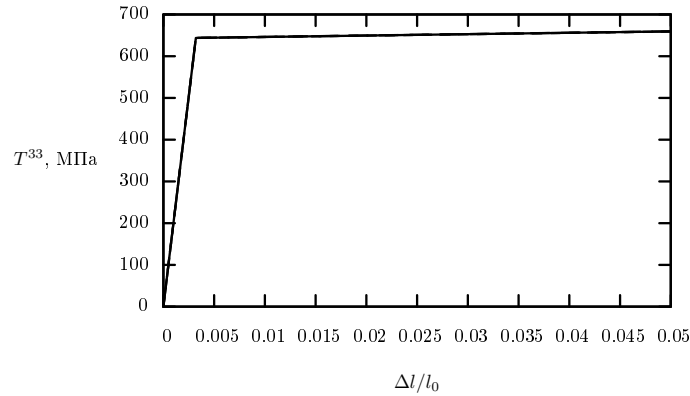


Рис. 2. Напряжение

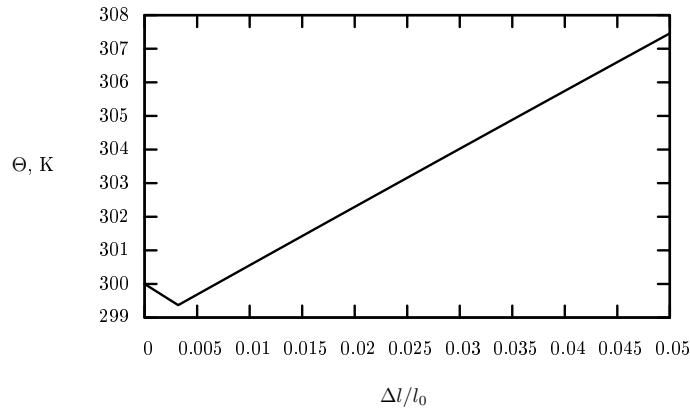


Рис. 3. Изменение температуры

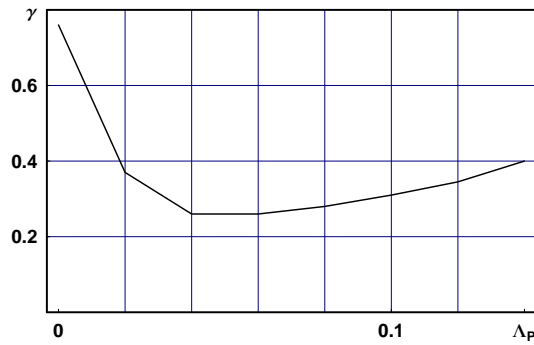
в соответствии с данными справочников следующими: коэффициент линейного температурного расширения $\beta = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, плотность материала в начальной конфигурации $\rho_0 = 8.0 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, коэффициент удельной (на единицу массы) теплоемкости при нулевом напряжении $c_T = 0.46 \cdot 10^{-3} \text{ МДж/(кг} \cdot \text{К)}$, предел текучести $\sigma_T = 640 \text{ МПа}$, модуль пластического упрочнения $H = 350 \text{ МПа}$.

Стержень растягивался с постоянной скоростью $0.5 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ до 5%-ного удлинения за 10^4 шагов. На рис. 2 приведена единственная ненулевая составляющая тензора истинных напряжений в зависимости от безразмерного удлинения $\Delta l/l_0$, где l_0 – начальная длина стержня.

Как и должно быть, после небольшого упругого участка наступает пластичность, и большого интереса этот рисунок не представляет в отличие от рис. 3, где показана зависимость изменения температуры от безразмерного удлинения в адиабатическом процессе. Здесь сначала (на упругой стадии) температура незначительно убывает, а с возникновением пластичности она растет практически линейно. Убывание температуры происходит в полном соответствии с соотношениями (1.19), (1.20), которые для адиабатического процесса принимают вид

$$c_\sigma \dot{\Theta} = -\beta \Theta_0 I_1(\dot{\mathbf{T}}), \quad c_e \dot{\Theta} = -3K\beta \Theta_0 I_1(\dot{\mathbf{e}}).$$

Из первого уравнения следует линейное уменьшение температуры при равномерном растяжении (линейном росте напряжения), а из второго – возрастание объема.

Рис. 4. Типичная зависимость γ от Λ_P

2.2. Пластическая работа, перешедшая в тепло. Известно, что часть пластической работы, затраченной на деформирование материалов, переходит в тепло, а часть идет на изменение энергий дислокаций, дефектов и т. п. и энергий их взаимодействия. При низких скоростях деформации скорость нагрева равна скорости охлаждения и процесс считается изотермическим. При более высоких скоростях, однако, скорость генерации тепла намного выше, чем скорость охлаждения и адиабатический процесс является причиной возрастания температуры (при испытаниях на сжатие). Для оценки доли общего количества пластической работы, перешедшей в тепло, вводится, как обычно, отношение

$$\gamma = \frac{\dot{Q}_{IN}}{\dot{W}_P}, \quad \dot{W}_P = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN} \quad (2.5)$$

и экспериментально определяется зависимость γ от накопленной меры пластической деформации, за которую можно принять величину

$$\Lambda_P = \int_0^t \mathbf{D}_{IN}(\tau) \cdot \mathbf{D}_{IN}(\tau) d\tau.$$

До недавнего времени большинство работ в этой области проводилось в условиях квазистатического эксперимента. В результате чего был сделан вывод, что γ есть постоянная величина, принимающая значения между 0.8 и 1. Попытки измерить γ в динамических экспериментах, выполненных в широком диапазоне деформаций и скоростей деформаций, показали, что γ варьируется от 0.6 до 0.9 в зависимости от исследуемого металла, величины деформации и скорости деформации. Это является убедительным подтверждением влияния деформации и скорости деформации на распределение затраченной пластической работы на запасенную и тепловую части энергии. Экспериментальные данные по большим деформациям показали, что материал не может неограниченно накапливать энергию, при некотором критическом уровне пластической деформации почти вся энергия превращается в тепло и γ достигает единицы. Типичная зависимость γ от Λ_P имеет вид (см. [13]), представленный на рис. 4.

В экспериментальных работах, связанных с пластическими деформациями, обсуждается вопрос зависимости упругих параметров материала от предварительной пластической деформации. Эксперименты М.А. Жукова и В.С. Ленского показали, что упругие свойства металлов зависят от пластической деформации. Так, предварительная пластическая вытяжка на 2% вызвала уменьшение модуля сдвига на 19%, а предварительная пластическая деформация сдвига на 4% уменьшила

модуль Юнга на 20%. Продолжительный отдых пластически деформированного металла почти полностью восстанавливает первоначальные упругие свойства.

О.А. Шишмарев и Ю.А. Созонов согласны с этими выводами в качественной части, но в части количественной получили незначительное (5–7%) уменьшение первоначальных величин. Они дают объяснение такому несоответствию с данными работ М.А. Жукова и В.С. Ленского и указывают принципиальные моменты, не учтенные в последних, которые и могли привести к некорректным результатам.

Опираясь на эксперименты О.А. Шишмарева и Ю.А. Созонова, будем считать, что упругие свойства материала не зависят от предварительной (не очень глубокой) пластической деформации. Это приводит к тому, что в соотношении для скорости производства тепла неупругими источниками (1.18) (и в тензоре напряжений (1.9)) все производные от напряжения и от функционала W_1 по скалярным структурным параметрам равны нулю, и оно переписывается в виде

$$\dot{Q}_{IN} = (1 - 2\beta\Theta) \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN} - J^{-1} \rho_0 \frac{\partial \Psi_3}{\partial \mu_i} \dot{\mu}_i. \quad (2.6)$$

В соответствии со вторым законом термодинамики (1.14), величины, входящие в (2.6), должны удовлетворять неравенству

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN} - J^{-1} \rho_0 \frac{\partial \Psi_3}{\partial \mu_i} \dot{\mu}_i \geq 0.$$

В результате (2.5) запишется как

$$\gamma = (1 - 2\beta\Theta) - \frac{J^{-1} \rho_0 \frac{\partial \Psi_3}{\partial \mu_i} \dot{\mu}_i}{\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN}}. \quad (2.7)$$

Учтем, что в теории пластичности (см. (2.3))

$$\mathbf{D}_P = \frac{3\dot{\sigma}_i}{2H\sigma_i} \mathbf{S}.$$

Тогда

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_P = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D}_P = \frac{2H\sigma_i}{3\dot{\sigma}_i} (\mathbf{D}_P \cdot \mathbf{D}_P) = \frac{2H\sigma_i}{3\dot{\sigma}_i} \dot{\Lambda}_P. \quad (2.8)$$

Ограничимся только одним параметром μ и будем считать, что μ есть функция от Λ_P . Тогда $\dot{\mu} = (\partial \mu / \partial \Lambda_P) \dot{\Lambda}_P$ и соотношение (2.7) переписывается с учетом (2.8) в виде

$$\gamma = (1 - 2\beta\Theta) - J^{-1} \rho_0 \frac{3\dot{\sigma}_i}{2H\sigma_i} \frac{\partial \Psi_3}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \Lambda_P}. \quad (2.9)$$

Разумно положить, что $\mu(\Lambda_P)$ слабо меняется при малых Λ_P , затем скорость этого изменения значительно возрастает и наконец кривая выходит на насыщение. Такое поведение $\mu(\Lambda_P)$ было описано двумя способами. Первый использовал две экспоненты, состыкованные в точке Λ_{P0} , в том числе и по первой производной:

$$\mu = \begin{cases} (1 - A) \exp \left[\frac{cA}{1-A} (\Lambda_P - \Lambda_{P0}) \right] & \text{при } \Lambda_P \leq \Lambda_{P0}, \\ 1 - A \exp [-c(\Lambda_P - \Lambda_{P0})] & \text{при } \Lambda_P \geq \Lambda_{P0}. \end{cases}$$

График функции μ приведен на рис. 5 в переменных $x \sim y$, соответствующих переменным $\Lambda_P \sim \mu$. Здесь кривая 1 построена для параметров $A = 0.3$, $c = 3$, $\Lambda_{P0} = 3$, кривая 2 – $A = 0.3$, $c = 5$, $\Lambda_{P0} = 3$ и кривая 3 – $A = 0.3$, $c = 7$, $\Lambda_{P0} = 2$.

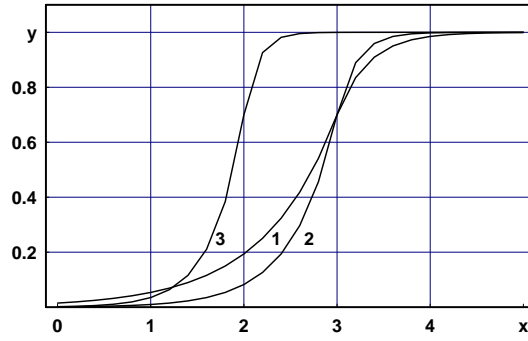
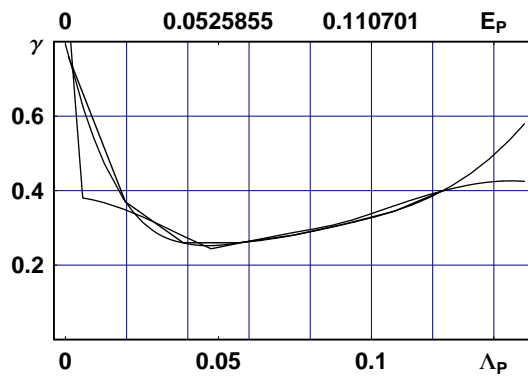
Рис. 5. Зависимости $\mu(y)$ от $\Lambda_P(x)$ при некоторых значениях параметров

Рис. 6. Результаты описания кривой сплайном

Недостатки этой аппроксимации связаны с поведением функции $\mu(\Lambda_P)$ при $\Lambda_P \rightarrow 0$. Поэтому предполагаемое поведение функции $\mu(\Lambda_P)$ аппроксимировалось еще и сплайном

$$\mu = \begin{cases} a_0 \Lambda_P^2 & \text{при } 0 \leq \Lambda_P \leq \Lambda_{P1}, \\ a_1 + b_1 \Lambda_P + c_1 \Lambda_P^2 & \text{при } \Lambda_{P1} \leq \Lambda_P \leq \Lambda_{P2}, \\ a_2 + b_2 \Lambda_P + c_2 \Lambda_P^2 & \text{при } \Lambda_{P2} \leq \Lambda_P \leq \Lambda_{P3}, \\ a_3 + b_3 \Lambda_P + c_3 \Lambda_P^2 & \text{при } \Lambda_{P3} \leq \Lambda_P \leq \Lambda_{P4}, \end{cases} \quad (2.10)$$

где за Λ_{P2} принималась точка перегиба на кривой рис. 4, а за Λ_{P4} – самая правая точка того же рисунка. На коэффициенты сплайна накладывались условия сопряжения на концах каждого отрезка, в том числе и по производным, и требование определенного их поведения на каждом участке. Полученные связи определили независимые параметры сплайна. Полагая, что $\Psi_3(\mu) = a\mu + b\mu^2$, и используя зависимость (2.10), соотношение (2.9) было преобразовано. Входящие в это преобразованное соотношение коэффициенты находились из условия наилучшего приближения кривой на рис. 4 методом сканирования по этим параметрам. На рис. 6 приведена ломаная кривая из рис. 4, результаты ее сглаживания и приближения сплайном. На верхней горизонтальной шкале указана величина пластической деформации. Наибольшие погрешности в аппроксимации получились на концах области.

Заключение

Все кинематические и силовые величины при конечных деформациях сложных сред определяются историей происходящих в этих средах термо-упруго-неупругих процессов. Для описания этой истории использован подход, основанный на кинематике наложения малых деформаций на конечные. Подход оказался продуктивным для построения как кинематических соотношений термо-упруго-неупругого процесса, так и определяющих уравнений, удовлетворяющих принципам термодинамики и объективности. В настоящей работе этот подход использован для описания экспериментальной кривой доли общего количества пластической работы, перешедшей в тепло. Полученные результаты позволили идентифицировать введенные в развиваемом подходе меру структурных изменений, произошедших в материале в результате пластической деформации, и слагаемое в свободной энергии, связанное с этой мерой.

Дальнейшие исследования, как представляется, должны быть направлены на установление связей между неупругой энергией, затраченной на изменение структуры материала, и параметрами в соотношениях, описывающих пластический процесс.

Работа выполнена в ведущей научной школе (гранты Президента Российской Федерации НШ-8055.2006.1, НШ-3717.2008.1 и НШ-7529.2010.1) в рамках программы фундаментальных исследований Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (№ 09-T-1-1006), программы совместных фундаментальных исследований УрО РАН, СО РАН и ДВО РАН (№ 09-C-1-1008), Государственного контракта с Федеральным агентством по науке и инновациям (№ 02.740.11.0442) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00184).

Summary

A.A. Rogovoi. Finite Deformations in Materials with Structural Changes.

The paper is concerned with the problem of dividing the inelastic energy into heat and latent energy, the latter being connected with the structural changes in a material. Here we use the approach leading, in the framework of finite deformations, to the heat conductivity equation, namely, to that part of it, which defines heat production by inelastic sources. Taking into account the experimental data, it has been supposed that the elastic properties of a material do not depend on the structural changes caused by plastic deformations. The experimental curve describing the fraction of plastic work transformed into heat has been obtained.

Key words: finite deformations, heat conductivity equation, heat and latent inelastic energy, plastic work transformed into heat.

Литература

1. *Роговой А.А.* Кинематика и термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // Электр. журн. «Физико-химическая кинетика в газовой динамике». – 2008. – Т. 7. – URL: www.chemphys.edu.ru/pdf/2008-09-01-022.pdf
2. *Роговой А.А.* Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // Прикл. мех. и техн. физ. – 2005. – Т. 46, № 5. – С. 138–149.
3. *Роговой А.А.* Термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // Прикл. мех. и техн. физ. – 2007. – Т. 48, № 4. – С. 144–153.

4. *Роговой А.А.* Кинематика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // Прикл. мех. и техн. физ. – 2008. – Т. 49, № 1. – С. 165–172.
5. *Новокишанов Р.С., Роговой А.А.* О построении эволюционных определяющих соотношений для конечных деформаций // Изв. РАН. МТТ. – 2002. – № 4. – С. 77–95.
6. *Новокишанов Р.С., Роговой А.А.* Эволюционные определяющие соотношения для конечных вязкоупругих деформаций // Изв. РАН. МТТ. – 2005. – № 4. – С. 122–140.
7. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
8. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
9. *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
10. *Роговой А.А.* Дифференцирование скалярных и тензорных функций тензорного аргумента // Вестн. Перм. гос. техн. ун-та. Динамика и прочность машин. – 2001. – № 2. – С. 83–90.
11. *Лурье А.И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
12. *Столбова О.С.* Термоупругие и термоупругопластические процессы при конечных деформациях: применение формализованного подхода: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Пермь, 2008. – 17 с.
13. *Rosakis P., Rosakis A.J., Ravichandran G., Hodowany J.* A thermodynamic internal variable model for the partition of plastic work into heat and stored energy in metals // J. Mech. Phys. Solids. – 2000. – V. 48. – P. 581–607.

Поступила в редакцию
25.02.10

Роговой Анатолий Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора по научной работе, заведующий лабораторией Института механики сплошных сред Уральского отделения РАН, г. Пермь.

E-mail: rogovoy@icmtt.ru